প্রশ্ন (Question) 1

$|z| - z = 1 + 2i$ সমীকরণটির সমাধান নিচের কোনটি?

What is the solution to the equation $|z| - z = 1 + 2i$*?*

A) $z = \frac{3}{2} + 2i$

B) $z = \frac{3}{2} - 2i$

C) $z = -\frac{3}{2} + 2i$

D) $z = -\frac{3}{2} - 2i$

উত্তর: B) $z = \frac{3}{2} - 2i$

সমাধান (Solution)

ধরি, $z = x + iy$. প্রদত্ত সমীকরণটি হলো:

$$|z| - z = 1 + 2i$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} - (x + iy) = 1 + 2i$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x^2 + y^2} - x) - iy = 1 + 2i$$

বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করে পাই:

- কাল্পনিক অংশ হতে: $-y = 2 \Rightarrow y = -2$
- বাস্তব অংশ হতে: $\sqrt{x^2 + y^2} - x = 1$

এখানে $y = -2$ বসিয়ে পাই:

$$\sqrt{x^2 + (-2)^2} = x + 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + 4} = x + 1$$

উভয়পক্ষে বর্গ করে পাই:

$$x^2 + 4 = x^2 + 2x + 1$$

$$\Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

সুতরাং, নির্ণেয় জটিল সংখ্যা $z = x + iy = \frac{3}{2} - 2i$.

প্রশ্ন (Question) 2

যদি z এবং w দুটি অশূন্য জটিল সংখ্যা হয় যা $z + iw = 0$ এবং $\arg(zw) = \pi$ শর্ত দুটি সিদ্ধ করে, তবে w এর মুখ্য আর্গুমেন্ট $\arg(w)$ এর মান কত?

If z and w are two non-zero complex numbers satisfying $z+iw = 0$ and $\arg(zw) = \pi$, then the principal argument of w, $\arg(w)$, is:

A) $\frac{\pi}{4}$

B) $\frac{3\pi}{4}$

C) $-\frac{\pi}{4}$

D) $-\frac{3\pi}{4}$

উত্তর: B) $\frac{3\pi}{4}$

সমাধান (Solution)

দেওয়া আছে, $z + iw = 0 \Rightarrow z = -iw$. তাহলে গুণফল:

$$zw = (-iw)w = -iw^2$$

আর্গুমেন্টের ধর্মাবলি প্রয়োগ করে পাই:

$$\arg(zw) = \arg(-iw^2)$$

$$\Rightarrow \arg(-i) + \arg(w^2) = \pi \pmod{2\pi}$$

আমরা জানি, $\arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$. সুতরাং:

$$-\frac{\pi}{2} + 2\arg(w) = \pi \pmod{2\pi}$$

$$\Rightarrow 2\arg(w) = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

$$\Rightarrow \arg(w) = \frac{3\pi}{4} \text{ বা } \arg(w) = -\frac{\pi}{4}$$

আমরা যাচাই করে পাই: যদি $\arg(w) = \frac{3\pi}{4}$ হয়, তবে w^2 এর আর্গুমেন্ট হবে $2 \times \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} \equiv -\frac{\pi}{2}$. সেক্ষেত্রে $\arg(-iw^2) = \arg(-i) + \arg(w^2) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi \equiv \pi$. এটি প্রদত্ত শর্তের সাথে সামঞ্জস্যপূর্ণ।

অতএব, $\arg(w) = \frac{3\pi}{4}$.

প্রশ্ন (Question) 3

জটিল সমতলে $(1+2i)z + (2i-1)\bar{z} = 10i$ সমীকরণটি যে সরলরেখা প্রকাশ করে, তার দ্বারা কাল্পনিক অক্ষের খণ্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য কত একক?

What is the length of the intercept on the imaginary axis made by the straight line $(1+2i)z + (2i-1)\bar{z} = 10i$ on the complex plane?

A) 5 একক (5 units)

B) $\frac{5}{2}$ একক ($\frac{5}{2}$ units)

C) -5 একক (-5 units)

D) 3 একক (3 units)

উত্তর: A) 5 একক

সমাধান (Solution)

ধরি, $z = x + iy \Rightarrow \bar{z} = x - iy$. সরলরেখার সমীকরণে মান বসিয়ে পাই:

$$(1+2i)(x+iy) + (2i-1)(x-iy) = 10i$$

$$\Rightarrow (x - 2y + i(2x+y)) + (-x + 2y + i(2x+y)) = 10i$$

বাস্তব অংশগুলো যোগ করে এবং কাল্পনিক অংশগুলো যোগ করে পাই:

$$(x - 2y - x + 2y) + i(2x + y + 2x + y) = 10i$$

$$\Rightarrow 0 + i(4x + 2y) = 10i$$

$$\Rightarrow 4x + 2y = 10 \Rightarrow 2x + y = 5$$

এটি কার্তেসীয় সমতলে একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্দেশ করে। কাল্পনিক অক্ষ অর্থাৎ y-অক্ষ বরাবর খণ্ডিত অংশ বের করতে সমীকরণে $x = 0$ বসাই:

$$2(0) + y = 5 \Rightarrow y = 5$$

অতএব, কাল্পনিক অক্ষের খণ্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য হলো 5 একক।

প্রশ্ন (Question) 4

যদি কোনো জটিল সংখ্যা z সমতলে $\frac{1}{2}$ একক ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি বৃত্তে অবস্থান করে, তবে $w = -1 + 4z$ রূপান্তরটির মাধ্যমে গঠিত জটিল সংখ্যা w সর্বদা কত একক ব্যাসার্ধের বৃত্তের উপর অবস্থান করবে?

If a complex number z lies on a circle of radius $\frac{1}{2}$ units on the complex plane, then the complex number $w = -1 + 4z$ will always lie on a circle of radius:

A) 1 একক (1 unit)

B) 2 একক (2 units)

C) 4 একক (4 units)

D) 8 একক (8 units)

উত্তর: B) 2 একক

সমাধান (Solution)

যেহেতু z বৃত্তের উপর অবস্থান করে, তাই ধরি বৃত্তটির সমীকরণ:

$$|z - z_0| = \frac{1}{2}$$

[যেখানে z_0 বৃত্তের কেন্দ্র]

দেওয়া আছে, $w = -1 + 4z$

$$\Rightarrow 4z = w + 1 \Rightarrow z = \frac{w+1}{4}$$

এবার z-এর এই মানটি পূর্বের বৃত্তের সমীকরণে বসিয়ে পাই:

$$\left|\frac{w+1}{4} - z_0\right| = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{w + 1 - 4z_0}{4}\right| = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow |w - (4z_0 - 1)| = 2$$

এটি একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্দেশ করে যার কেন্দ্র $(4z_0 - 1)$ এবং ব্যাসার্ধ $R = 2$ একক। সুতরাং, w সর্বদা 2 একক ব্যাসার্ধের বৃত্তের উপর অবস্থান করবে।

প্রশ্ন (Question) 5

যদি z একটি জটিল সংখ্যা হয় যা $\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 1$ এবং $|z| = \frac{5}{2}$ শর্ত দুটি সিদ্ধ করে, তবে $|z+3i|$ এর মান কত?

If z is a complex number satisfying $\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 1$ and $|z| = \frac{5}{2}$, then what is the value of $|z+3i|$?

A) $\sqrt{10}$

B) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

C) $\frac{\sqrt{61}}{2}$

D) $2\sqrt{3}$

উত্তর: C) $\frac{\sqrt{61}}{2}$

সমাধান (Solution)

প্রথম শর্তানুসারে:

$$\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 1 \Rightarrow |z-i| = |z+i|$$

এটি আর্গন্ড চিত্রে i এবং $-i$ বিন্দুর সংযোগকারী রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখণ্ডক নির্দেশ করে, যা মূলত বাস্তব অক্ষ বা x-অক্ষ $(y = 0)$। সুতরাং, z একটি সম্পূর্ণ বাস্তব সংখ্যা। ধরি, $z = x$।

দ্বিতীয় শর্তানুসারে:

$$|z| = \frac{5}{2} \Rightarrow |x| = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{5}{2}$$

এখন, $|z+3i|$ এর মান হবে:

$$|z+3i| = \left|\pm\frac{5}{2} + 3i\right| = \sqrt{\left(\pm\frac{5}{2}\right)^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{\frac{25}{4} + 9} = \sqrt{\frac{61}{4}} = \frac{\sqrt{61}}{2}$$

প্রশ্ন (Question) 6

জটিল সংখ্যা z যদি অসমতা $|z-1-2i| \leq 1$ সিদ্ধ করে, তবে এই অঞ্চলের অন্তর্ভুক্ত সর্বনিম্ন ধনাত্মক আর্গুমেন্ট বিশিষ্ট জটিল সংখ্যাটির বাস্তব অংশ কত?

If the complex number z satisfies the inequality $|z-1-2i| \leq 1$, then what is the real part of the complex number in this region that has the least positive argument?

A) $\frac{4}{5}$

B) $\frac{8}{5}$

C) $\frac{2}{5}$

D) $\frac{6}{5}$

উত্তর: B) $\frac{8}{5}$

সমাধান (Solution)

অসমতা $|z-(1+2i)| \leq 1$ দ্বারা কার্তেসীয় সমতলে $(1,2)$ কেন্দ্র এবং $R=1$ একক ব্যাসার্ধের একটি সীমাবদ্ধ বৃত্তাকার চাকতি নির্দেশিত হয়। মূলবিন্দু $O(0,0)$ হতে অঙ্কিত যে স্পর্শকটি বৃত্তের নিচে অবস্থান করে, তার স্পর্শবিন্দু P এর আর্গুমেন্টই হবে সর্বনিম্ন ধনাত্মক আর্গুমেন্ট (θ)।

ধরি, বৃত্তের কেন্দ্র $C=1+2i$। সুতরাং, $OC=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$। স্পর্শবিন্দু P-তে স্পর্শকটি ব্যাসার্ধের সাথে সমকোণ উৎপন্ন করে, অতএব $\angle OPC=90^\circ$। সমকোণী ত্রিভুজ OPC হতে পাই:

$$OP=\sqrt{OC^2-R^2}=\sqrt{5-1}=2$$

ধরি, OC রেখাংশের আর্গুমেন্ট α, যেখানে $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$ এবং $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$। ধরি, $\angle POC=\phi$। ত্রিভুজ OPC হতে পাই:

$$\sin\phi=\frac{R}{OC}=\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{এবং} \quad \cos\phi=\frac{OP}{OC}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

স্পর্শবিন্দু P এর আর্গুমেন্ট $\theta = \alpha - \phi$। অতএব, P বিন্দুর বাস্তব অংশ হবে:

$$\begin{aligned}
\text{Re}(P) &= OP\cos\theta = 2\cos(\alpha - \phi) \\
&= 2(\cos\alpha\cos\phi + \sin\alpha\sin\phi) \\
&= 2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \\
&= 2\left(\frac{2}{5} + \frac{2}{5}\right) = 2\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{8}{5}
\end{aligned}$$

প্রশ্ন (Question) 7

জটিল সংখ্যা z এর জন্য, $z^2 + \bar{z} = 0$ সমীকরণটি সিদ্ধ করে এমন জটিল সংখ্যা z এর সর্বমোট সমাধান সংখ্যা কতটি?

For the complex number z, the total number of solutions to the equation $z^2 + \bar{z} = 0$ is:

A) 2 টি (2 solutions)

B) 3 টি (3 solutions)

C) 4 টি (4 solutions)

D) অসংখ্য (Infinitely many)

উত্তর: C) 4 টি

সমাধান (Solution)

ধরি, $z = x + iy$, যেখানে $x, y \in \mathbb{R}$। তাহলে অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা $\bar{z} = x - iy$। প্রদত্ত সমীকরণটি হলো:

$$z^2 + \bar{z} = 0$$

$$\Rightarrow (x + iy)^2 + (x - iy) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 + 2ixy + x - iy = 0$$

বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ আলাদা করে পাই:

$$(x^2 - y^2 + x) + i(2xy - y) = 0$$

উভয় পক্ষ হতে বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করে পাই:

$$\text{বাস্তব অংশ:} \quad x^2 - y^2 + x = 0 \quad \text{--- (1)}$$
$$\text{কাল্পনিক অংশ:} \quad 2xy - y = 0 \Rightarrow y(2x-1) = 0 \quad \text{--- (2)}$$

সমীকরণ (2) হতে পাই: অথবা $y = 0$ অথবা $2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$।

ক্ষেত্র-১: যখন $y = 0$
সমীকরণ (1) এ $y = 0$ বসিয়ে পাই:

$$x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ অথবা } x = -1$$

সুতরাং, জটিল সংখ্যা দুটি হলো: $z_1 = 0$ এবং $z_2 = -1$।

ক্ষেত্র-২: যখন $x = \frac{1}{2}$
সমীকরণ (1) এ $x = \frac{1}{2}$ বসিয়ে পাই:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 - y^2 + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{4} - y^2 + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

সুতরাং, জটিল সংখ্যা দুটি হলো: $z_3 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ এবং $z_4 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$।

অতএব, সমীকরণটির সর্বমোট 4 টি ভিন্ন সমাধান রয়েছে।

প্রশ্ন (Question) 8

যদি $i = \sqrt{-1}$ হয়, তবে $\sum_{n=1}^{97} i^{n!}$ এর মান নিচের কোনটি?

If $i = \sqrt{-1}$, then the value of $\sum_{n=1}^{97} i^{n!}$ is:

A) $95 + i$

B) $92 + i$

C) $97 + i$

D) $94 + i$

উত্তর: B) $92 + i$

সমাধান (Solution)

প্রদত্ত ধারাটি হলো:

$$S = \sum_{n=1}^{97} i^{n!} = i^{1!} + i^{2!} + i^{3!} + i^{4!} + \cdots + i^{97!}$$

এখন প্রতিটি পদের মান নির্ণয় করি:

$$n = 1 \Rightarrow i^{1!} = i^1 = i$$
$$n = 2 \Rightarrow i^{2!} = i^2 = -1$$
$$n = 3 \Rightarrow i^{3!} = i^6 = i^2 = -1$$
$$n = 4 \Rightarrow i^{4!} = i^{24} = 1 \text{ (যেহেতু } 24, 4 \text{ দ্বারা বিভাজ্য)}$$

যেকোনো $n \geq 4$ এর জন্য, $n!$ এর উৎপাদক হিসেবে 4 বিদ্যমান থাকে। তাই $n!$ সর্বদা 4 দ্বারা বিভাজ্য। অতএব, $n \geq 4$ এর জন্য $i^{n!} = i^{4k} = 1$ (যেখানে $k \in \mathbb{N}$)।

সুতরাং, ধারাটিকে নিম্নোক্ত উপায়ে লেখা যায়:

$$S = i + (-1) + (-1) + \sum_{n=4}^{97} 1$$

এখানে, $n = 4$ হতে 97 পর্যন্ত মোট পদসংখ্যা হলো $97 - 4 + 1 = 94$ টি। অতএব:

$$S = i - 2 + (94 \times 1)$$

$$S = 92 + i$$

সুতরাং, নির্ণেয় মান হলো $92 + i$।

প্রশ্ন (Question) 9

যদি ω এককের একটি কাল্পনিক ঘনমূল হয়, তবে $|a\omega + b| = 1$ সমীকরণটি সিদ্ধ করে এমন পূর্ণসংখ্যার ক্রোমজোড় (a, b) এর সংখ্যা কতটি?

If ω is a non-real cube root of unity, then the number of ordered pairs of integers (a, b) satisfying the equation $|a\omega + b| = 1$ is:

A) 2 টি (2 pairs)

B) 4 টি (4 pairs)

C) 6 টি (6 pairs)

D) 8 টি (8 pairs)

উত্তর: C) 6 টি

সমাধান (Solution)

আমরা জানি, এককের কাল্পনিক ঘনমূল $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$। প্রদত্ত সমীকরণটি হলো:

$$|a\omega + b| = 1$$

$$\Rightarrow \left|a\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + b\right| = 1$$

বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ আলাদা করে পাই:

$$\left|\left(b - \frac{a}{2}\right) + i\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)\right| = 1$$

উভয় পক্ষকে বর্গ করে পরমমান বের করি:

$$\left(b - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1^2$$

$$\Rightarrow b^2 - ab + \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} = 1$$

$$\Rightarrow a^2 - ab + b^2 = 1 \quad \text{--- (1)}$$

সমীকরণটিকে 4 দ্বারা গুণ করে পাই:

$$4a^2 - 4ab + 4b^2 = 4$$

$$\Rightarrow (2a - b)^2 + 3b^2 = 4 \quad \text{--- (2)}$$

যেহেতু a এবং b পূর্ণসংখ্যা, তাই $3b^2$ এর মান অবশ্যই 0 অথবা এর চেয়ে বড় পূর্ণসংখ্যা হতে হবে যা 4 এর সমান বা ছোট। সম্ভাব্য ক্ষেত্রগুলো হলো:

ক্ষেত্র-১: যখন $b^2 = 0 \Rightarrow b = 0$
সমীকরণ (2) হতে পাই:

$$(2a - 0)^2 + 0 = 4 \Rightarrow 4a^2 = 4 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

ক্রোমজোড়গুলো হলো: $(1, 0)$, $(-1, 0)$। (2 টি)

ক্ষেত্র-২: যখন $b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm 1$

সমীকরণ (2) হতে পাই:

$$(2a-b)^2+3(1)=4 \Rightarrow (2a-b)^2=1 \Rightarrow 2a-b=\pm 1$$

- যদি $b=1$ হয়, তবে $2a-1=\pm 1$:

$$2a-1=1 \Rightarrow a=1$$
$$2a-1=-1 \Rightarrow a=0$$

ক্রোমজোড়গুলো হলো: $(1,1)$, $(0,1)$। (2 টি)

- যদি $b=-1$ হয়, তবে $2a+1=\pm 1$:

$$2a+1=1 \Rightarrow a=0$$
$$2a+1=-1 \Rightarrow a=-1$$

ক্রোমজোড়গুলো হলো: $(0,-1)$, $(-1,-1)$। (2 টি)

ক্ষেত্র-৩: যখন $b^2 \geq 2 \Rightarrow 3b^2 \geq 6 > 4$, যা অসম্ভব।
অতএব, সর্বমোট পূর্ণসাংখ্যিক সমাধান জোড় (a,b) এর সংখ্যা হলো $2+2+2=6$ টি।

প্রশ্ন (Question) 10

যদি z_1, z_2, z_3 তিনটি জটিল সংখ্যা এমন হয় যে $|z_1|=|z_2|=|z_3|=\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right|=1$ হয়, তবে $|z_1+z_2+z_3|$ এর মান কত?

If z_1, z_2, z_3 are complex numbers such that $|z_1|=|z_2|=|z_3|=\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right|=1$, then the value of $|z_1+z_2+z_3|$ is:

A) 1

B) 3

C) 0

D) 2

উত্তর: A) 1

সমাধান (Solution)

দেওয়া আছে: $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$

আমরা জানি, যেকোনো জটিল সংখ্যা z এর জন্য $z\bar{z} = |z|^2$। অতএব:

$$|z_1|^2 = 1 \Rightarrow z_1\bar{z}_1 = 1 \Rightarrow \frac{1}{z_1} = \bar{z}_1$$

অনুরূপভাবে:

$$\frac{1}{z_2} = \bar{z}_2 \quad \text{এবং} \quad \frac{1}{z_3} = \bar{z}_3$$

এখন প্রদত্ত সমীকরণটি হলো:

$$\left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right| = 1$$

উপরোক্ত অনুবন্ধী মানগুলো এখানে বসিয়ে পাই:

$$|\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3| = 1$$

আমরা জানি, অনুবন্ধী জটিল সংখ্যার ধর্মাবলি থেকে:

$$\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3 = \overline{z_1 + z_2 + z_3}$$

সুতরাং:

$$|\overline{z_1 + z_2 + z_3}| = 1$$

আবার, যেকোনো জটিল সংখ্যার মডুলাস তার অনুবন্ধীর মডুলাসের সমান, অর্থাৎ $|\bar{Z}| = |Z|$। অতএব:

$$|z_1 + z_2 + z_3| = 1$$

প্রশ্ন (Question) 11

যদি $|z| = 1$ এবং $w = \frac{z-1}{z+1}$ (যেখানে $z \neq -1$) হয়, তবে $\text{Re}(w)$ এর মান কত?

If $|z| = 1$ and $w = \frac{z-1}{z+1}$ (where $z \neq -1$), then $Re(w)$ is:

A) 1

B) 0

C) -1

D) $\frac{1}{|z+1|^2}$

উত্তর: B) 0

সমাধান (Solution)

যেহেতু $|z| = 1$, সেহেতু আমরা জটিল সংখ্যা z কে অয়লারের আকারে লিখতে পারি:

$$z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \quad \text{যেখানে } \theta \in (-\pi, \pi)$$

প্রদত্ত রূপান্তরটি হলো:

$$w = \frac{z-1}{z+1} = \frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$$

লব ও হরকে ত্রিকোণমিতিক গুণাবলীতে রূপান্তর করে পাই:

$$\text{লব:} \quad e^{i\theta} - 1 = \cos\theta - 1 + i\sin\theta = -2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$$\text{হর:} \quad e^{i\theta} + 1 = \cos\theta + 1 + i\sin\theta = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

এখন ভাগফল নির্ণয় করি:

$$w = \frac{2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]} = i\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

দেখা যাচ্ছে যে, w একটি সম্পূর্ণ কাল্পনিক সংখ্যা। অতএব, এর বাস্তব অংশ:

$$\text{Re}(w) = 0$$

প্রশ্ন (Question) 12

যদি n যেকোনো পূর্ণসংখ্যা হয়, তবে $Z = (2+3i)^{4n+2} + (3-2i)^{4n+2}$ জটিল সংখ্যাটির সরলীকৃত মান কত?

If n is any integer, then the simplified value of the complex number $Z = (2+3i)^{4n+2} + (3-2i)^{4n+2}$ is:

A) 2^{4n+2}

B) 1

C) 0

D) -1

উত্তর: C) 0

সমাধান (Solution)

আমরা জটিল সংখ্যা $3-2i$ কে নিম্নোক্ত উপায়ে লিখতে পারি:

$$-i(2+3i) = -2i - 3i^2 = -2i - 3(-1) = 3 - 2i$$

অতএব, $3-2i = -i(2+3i)$। এবার প্রদত্ত রাশিতে এই মানটি বসিয়ে পাই:

$$Z = (2+3i)^{4n+2} + \{-i(2+3i)\}^{4n+2}$$

$$\Rightarrow Z = (2+3i)^{4n+2} + (-i)^{4n+2}(2+3i)^{4n+2}$$

এখন, $(-i)^{4n+2}$ এর মান হিসাব করি:

$$(-i)^{4n+2} = (-1)^{4n+2} \cdot i^{4n+2}$$

যেহেতু $4n+2$ সর্বদা একটি জোড় সংখ্যা, সেহেতু $(-1)^{4n+2} = 1$। আবার, $i^{4n+2} = i^{4n} \cdot i^2 = (i^4)^n \cdot (-1) = 1^n \cdot (-1) = -1$। অতএব:

$$(-i)^{4n+2} = 1 \cdot (-1) = -1$$

তাহলে সমীকরণটি দাঁড়ায়:

$$Z = (2+3i)^{4n+2} - (2+3i)^{4n+2} = 0$$

সুতরাং, n এর যেকোনো বাস্তব পূর্ণসাংখ্যিক মানের জন্য $Z = 0$ হবে।

প্রশ্ন (Question) 13

যদি $|z - \frac{4}{z}| = 2$ হয়, তবে $|z|$ এর সর্বোচ্চ মান কত হবে?

If $|z - \frac{4}{z}| = 2$, then what is the maximum value of $|z|$?

A) $\sqrt{5}+1$

B) $\sqrt{5}-1$

C) $\sqrt{3}+1$

D) $\sqrt{5}+2$

উত্তর: A) $\sqrt{5}+1$

সমাধান (Solution)

আমরা জানি, ত্রিভুজ অসমতা (Triangle Inequality) অনুযায়ী:

$$|z| = \left|\left(z - \frac{4}{z}\right) + \frac{4}{z}\right| \leq \left|z - \frac{4}{z}\right| + \left|\frac{4}{z}\right|$$

দেওয়া আছে, আমন্ত্রণ বা শর্তানুসারে $\left|z - \frac{4}{z}\right| = 2$। ধরি, $|z| = r$ (যেখানে $r > 0$)। তাহলে আমরা পাই:

$$r \leq 2 + \frac{4}{r}$$

$$\Rightarrow r^2 \leq 2r + 4$$

$$\Rightarrow r^2 - 2r - 4 \leq 0$$

দ্বিঘাত অসমতাটি সমাধান করার জন্য সমীকরণ $r^2 - 2r - 4 = 0$ এর মূলদ্বয় বের করি:

$$r = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4+16}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

যেহেতু $r = |z| > 0$, সেহেতু অসমতার গ্রহণযোগ্য সমাধান হবে:

$$0 < r \leq \sqrt{5}+1$$

অতএব, $|z|$ এর সর্বোচ্চ মান হবে $\sqrt{5}+1$।

প্রশ্ন (Question) 14

যদি $\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{\pi}{3}$ হয়, তবে জটিল সংখ্যা z এর সঞ্চারপথটি কার্তেসীয় সমতলে একটি বৃত্তের চাপ নির্দেশ করে। এই বৃত্তটির ব্যাসার্ধ কত একক?

If $\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{\pi}{3}$, *then the locus of the complex number* z *represents an arc of a circle in the cartesian plane. What is the radius of this circle in units?*

A) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ একক ($\frac{2}{\sqrt{3}}$ units)

B) $\sqrt{3}$ একক ($\sqrt{3}$ units)

C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ একক ($\frac{1}{\sqrt{3}}$ units)

D) $2\sqrt{3}$ একক ($2\sqrt{3}$ units)

উত্তর: A) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ একক

সমাধান (Solution)

ধরি, $z_1 = 1 \equiv (1, 0)$ এবং $z_2 = -1 \equiv (-1, 0)$ দুটি বিন্দু। সমীকরণ $\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{\pi}{3}$ নির্দেশ করে যে, $(-1, 0)$ এবং $(1, 0)$ বিন্দুগামী রেখাংশটি বৃত্তের চাপের উপর যেকোনো বিন্দু z-এ $\theta = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$ কোণ উৎপন্ন করে।

জ্যামিতিক নিয়ম অনুসারে, এই চাপের জ্যা-এর দৈর্ঘ্য $d = |z_1 - z_2| = |1 - (-1)| = 2$ একক। বৃত্তের কেন্দ্রে জ্যাটি $2\theta = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$ কোণ উৎপন্ন করে। ধরি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ R। কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ এবং ব্যাসার্ধের সম্পর্ক হতে আমরা পাই:

$$\sin\theta = \frac{d/2}{R}$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{R} \Rightarrow R = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ একক}$$

প্রশ্ন (Question) 15

যদি $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1}$ এককের n-তম কাল্পনিক মূলসমূহ হয়, তবে $(3-\alpha_1)(3-\alpha_2)(3-\alpha_3)\ldots(3-\alpha_{n-1})$ এর সরলীকৃত মান কত?

If $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1}$ are the non-real n-th roots of unity, then what is the simplified value of $(3-\alpha_1)(3-\alpha_2)(3-\alpha_3)\ldots(3-\alpha_{n-1})$?

A) $\frac{3^n-1}{2}$

B) $3^n - 1$

C) $\frac{3^{n-1}-1}{2}$

D) $3^{n-1} + 1$

উত্তর: A) $\frac{3^n-1}{2}$

সমাধান (Solution)

আমরা জানি, এককের n-তম মূলগুলো হলো $1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$। অতএব, বহুপদীর উৎপাদক উপপাদ্য অনুযায়ী আমরা লিখতে পারি:

$$x^n - 1 = (x-1)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{n-1})$$

$x \neq 1$ এর জন্য উভয় পক্ষকে $(x-1)$ দ্বারা ভাগ করে পাই:

$$\frac{x^n-1}{x-1} = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{n-1})$$

এখন সমীকরণে $x = 3$ বসিয়ে পাই:

$$\frac{3^n-1}{3-1} = (3-\alpha_1)(3-\alpha_2)\ldots(3-\alpha_{n-1})$$

$$\Rightarrow (3-\alpha_1)(3-\alpha_2)\ldots(3-\alpha_{n-1}) = \frac{3^n-1}{2}$$

প্রশ্ন (Question) 16

আর্গন্ড সমতলে z_1, z_2, z_3 শীর্ষবিন্দু বিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র মূলবিন্দুতে অবস্থিত। যদি $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ হয়, তবে z_2 এবং z_3 এর মান কত?

In the Argand plane, the circumcentre of an equilateral triangle with vertices z_1, z_2, z_3 is located at the origin. If $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, then what are the values of z_2 and z_3?

A) $1 - i\sqrt{3}$ এবং -2 ($1 - i\sqrt{3}$ and -2)

B) $-1 + i\sqrt{3}$ এবং $-1 - i\sqrt{3}$ ($-1 + i\sqrt{3}$ and $-1 - i\sqrt{3}$)

C) -2 এবং $-1 - i\sqrt{3}$ (-2 and $-1 - i\sqrt{3}$)

D) -2 এবং $-1 + i\sqrt{3}$ (-2 and $-1 + i\sqrt{3}$)

উত্তর: A) $1 - i\sqrt{3}$ এবং -2

সমাধান (Solution)

যেহেতু সমবাহু ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র মূলবিন্দু $O(0)$ তে অবস্থিত, তাই এর শীর্ষবিন্দুগুলোকে মূলবিন্দুর সাপেক্ষে 120° ($e^{i2\pi/3}$) এবং 240° ($e^{i4\pi/3}$) কোণে আবর্তন করে পাওয়া যাবে। দেওয়া আছে, $z_1 = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$।

এখন, z_2 পাওয়ার জন্য z_1 কে 120° কোণে আবর্তন করি:

$$z_2 = z_1 e^{i2\pi/3} = 2e^{i\pi/3}e^{i2\pi/3} = 2e^{i\pi}$$

আমরা জানি, $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$।

$$\Rightarrow z_2 = 2(-1) = -2$$

এখন, z_3 পাওয়ার জন্য z_1 কে 240° কোণে আবর্তন করি:

$$z_3 = z_1 e^{i4\pi/3} = 2e^{i\pi/3}e^{i4\pi/3} = 2e^{i5\pi/3}$$

$$\Rightarrow z_3 = 2\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right] = 2\left[\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = 1 - i\sqrt{3}$$

অতএব, শীর্ষবিন্দুদ্বয় হলো -2 এবং $1 - i\sqrt{3}$।

প্রশ্ন (Question) 17

জটিল রাশি $Z = \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^4}{(\sin\theta + i\cos\theta)^5}$ এর সরলীকৃত মান নিচের কোনটি?

What is the simplified value of the complex expression $Z = \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^4}{(\sin\theta + i\cos\theta)^5}$ *?*

A) $\cos(9\theta) + i\sin(9\theta)$

B) $\sin(9\theta) - i\cos(9\theta)$

C) $\sin(9\theta) + i\cos(9\theta)$

D) $\cos(9\theta) - i\sin(9\theta)$

উত্তর: B) $\sin(9\theta) - i\cos(9\theta)$

সমাধান (Solution)

অয়লারের সূত্র এবং পোলার আকার ব্যবহার করে লব ও হরকে সরল করি:

$$\text{লব:} \quad (\cos\theta + i\sin\theta)^4 = (e^{i\theta})^4 = e^{i4\theta}$$
$$\text{হর:} \quad (\sin\theta + i\cos\theta)^5$$

আমরা জানি, $\sin\theta + i\cos\theta = i(\cos\theta - i\sin\theta) = ie^{-i\theta}$। অতএব:

$$(\sin\theta + i\cos\theta)^5 = (ie^{-i\theta})^5 = i^5 e^{-i5\theta}$$

যেহেতু $i^5 = i^{4\times1+1} = i$, সেহেতু হরটি দাঁড়ায়: $ie^{-i5\theta}$।

এখন ভাগফল Z নির্ণয় করি:

$$Z = \frac{e^{i4\theta}}{ie^{-i5\theta}} = \frac{1}{i}e^{i(4\theta+5\theta)} = -ie^{i9\theta}$$

$$\Rightarrow Z = -i(\cos 9\theta + i\sin 9\theta) = -i\cos 9\theta - i^2\sin 9\theta$$

যেহেতু $i^2 = -1$, তাই:

$$Z = \sin 9\theta - i\cos 9\theta$$

প্রশ্ন (Question) 18

যদি ω এককের কাল্পনিক ঘনমূল হয়, তবে $\begin{vmatrix} x+1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & x+\omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & x+\omega \end{vmatrix} = 0$ সমীকরণটির একটি সমাধান নিচের কোনটি?

If ω is a non-real cube root of unity, then which of the following is a solution to the equation $\begin{vmatrix} x+1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & x+\omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & x+\omega \end{vmatrix} = 0$*?*

A) $x = 0$

B) $x = 1$

C) $x = \omega$

D) $x = \omega^2$

উত্তর: A) $x = 0$

সমাধান (Solution)

প্রদত্ত নির্ণায়ক সমীকরণটি হলো:

$$\begin{vmatrix} x+1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & x+\omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & x+\omega \end{vmatrix} = 0$$

নির্ণায়কের সারিতে অপারেশন প্রয়োগ করে পাই, প্রথম সারিতে সকল সারির যোগফল প্রতিস্থাপন করি ($R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$):

নতুন প্রথম সারির উপাদানগুলো হবে:

$$R_{11} = (x+1) + \omega + \omega^2 = x + (1+\omega+\omega^2) = x \quad (\text{যেহেতু } 1+\omega+\omega^2 = 0)$$
$$R_{12} = \omega + (x+\omega^2) + 1 = x + (1+\omega+\omega^2) = x$$
$$R_{13} = \omega^2 + 1 + (x+\omega) = x + (1+\omega+\omega^2) = x$$

অতএব, সমীকরণটি দাঁড়ায়:

$$\begin{vmatrix} x & x & x \\ \omega & x+\omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & x+\omega \end{vmatrix} = 0$$

প্রথম সারি হতে সাধারণ উৎপাদক x বাইরে নিয়ে পাই:

$$x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega & x+\omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & x+\omega \end{vmatrix} = 0$$

স্পষ্টতই, এই সমীকরণটির একটি নিশ্চিত সমাধান হলো $x = 0$।

প্রশ্ন (Question) 19

যদি দুটি অশূন্য জটিল সংখ্যা z_1 এবং z_2 এর জন্য $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$ হয়, তবে z_1 এবং z_2 এর আর্গুমেন্টের পার্থক্য কত?

If for two non-zero complex numbers z_1 and z_2, $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$, then what is the difference between the arguments of z_1 and z_2?

A) 0

B) $\frac{\pi}{4}$

C) $\frac{\pi}{2}$

D) π

উত্তর: C) $\frac{\pi}{2}$

সমাধান (Solution)

ধরি, $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ এবং $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$। দেওয়া আছে:

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2$$

$$\Rightarrow (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)$$

$$\Rightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2$$

$$\Rightarrow 2(z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) = 0$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) = 0$$

যেহেতু $z_1\bar{z}_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$, তাই এর বাস্তব অংশ হবে:

$$r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) = 0$$

যেহেতু $z_1, z_2 \neq 0$, তাই $r_1, r_2 \neq 0$। অতএব, $\cos(\theta_1 - \theta_2) = 0 \Rightarrow |\theta_1 - \theta_2| = \frac{\pi}{2}$। অর্থাৎ, এদের আর্গুমেন্টের পার্থক্য $\frac{\pi}{2}$।

প্রশ্ন (Question) 20

যদি $1, z_1, z_2$ এককের 3-তম মূলসমূহ (cube roots of unity) হয়, তবে $\sum_{k=1}^{2} \frac{1}{2-z_k}$ এর মান কত?

If $1, z_1, z_2$ are the 3rd roots of unity, then what is the value of $\sum_{k=1}^{2} \frac{1}{2-z_k}$?

A) $\frac{1}{7}$

B) $\frac{5}{7}$

C) $\frac{3}{7}$

D) $\frac{4}{7}$

উত্তর: B) $\frac{5}{7}$

সমাধান (Solution)

আমরা জানি, এককের তিনটি ঘনমূল হলো $1, \omega, \omega^2$। এখানে $z_1 = \omega$ এবং $z_2 = \omega^2$। আমাদের নির্ণেয় রাশিটি হলো:

$$S = \frac{1}{2-\omega} + \frac{1}{2-\omega^2}$$

$$S = \frac{(2-\omega^2)+(2-\omega)}{(2-\omega)(2-\omega^2)}$$

$$S = \frac{4-(\omega+\omega^2)}{4-2(\omega+\omega^2)+\omega^3}$$

আমরা জানি, $1+\omega+\omega^2 = 0 \Rightarrow \omega+\omega^2 = -1$ এবং $\omega^3 = 1$। এই মানগুলো বসিয়ে পাই:

$$S = \frac{4-(-1)}{4-2(-1)+1} = \frac{4+1}{4+2+1} = \frac{5}{7}$$

প্রশ্ন (Question) 21

যদি $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ হয়, তবে $z = \frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}$ জটিল সংখ্যাটির মুখ্য আর্গুমেন্ট (principal argument) কত?

If $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, then what is the principal argument of the complex number $z = \frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}$?

A) 2θ

B) $2\theta - \pi$

C) $2\theta - 2\pi$

D) $2\theta + \pi$

উত্তর: C) $2\theta - 2\pi$

সমাধান (Solution)

প্রদত্ত জটিল সংখ্যাটিকে অয়লারের আকারে রূপান্তর করি:

$$z = \frac{1+i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1-i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta}$$

$$\Rightarrow z = \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{i2\theta}$$

যেহেতু $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, সেহেতু $2\theta \in (\pi, 2\pi)$। কিন্তু আমরা জানি, মুখ্য আর্গুমেন্টের সীমা অবশ্যই $(-\pi, \pi]$ এর মধ্যে হতে হবে। যেহেতু $2\theta > \pi$, তাই এর মুখ্য আর্গুমেন্ট নির্ণয় করতে বৃত্তীয় ব্যবধান 2π বিয়োগ করতে হবে:

$$\arg(z) = 2\theta - 2\pi$$

প্রশ্ন (Question) 22

আর্গন্ড সমতলে যেকোনো জটিল সংখ্যা z এর জন্য $|z| + |z - 3 - 4i|$ এর সর্বনিম্ন মান কত হবে?

For any complex number z in the Argand plane, what is the minimum value of $|z| + |z - 3 - 4i|$?

A) 3

B) 4

C) 5

D) 7

উত্তর: C) 5

সমাধান (Solution)

ধরি, জটিল সমতলে মূলবিন্দু $O(0)$ এবং আরেকটি নির্দিষ্ট বিন্দু $A(3 + 4i)$। এখানে, $|z| = |z - 0|$ নির্দেশ করে O হতে z এর দূরত্ব। এবং $|z - (3 + 4i)|$ নির্দেশ করে A হতে z এর দূরত্ব।

ত্রিভুজ অসমতার (triangle inequality) জ্যামিতিক ধর্ম অনুসারে, যেকোনো বিন্দু z এর জন্য দূরত্বের সমষ্টি:

$$|z - 0| + |z - (3 + 4i)| \geq |0 - (3 + 4i)|$$

$$|0 - (3 + 4i)| = |3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

দূরত্বের এই সমষ্টিটি সর্বনিম্ন হবে যখন বিন্দু z সরাসরি O এবং A বিন্দুর সংযোগকারী সরলরেখাংশের উপর অবস্থান করবে। অতএব, সর্বনিম্ন মান হলো 5।

প্রশ্ন (Question) 23

আর্গন্ড সমতলে $|z-3| = 2|z+3|$ সমীকরণটি দ্বারা নির্দেশিত বৃত্তের কেন্দ্র কত?

What is the center of the circle represented by the equation $|z-3| = 2|z+3|$ in the Argand plane?

A) $(-5, 0)$

B) $(5, 0)$

C) $(-3, 0)$

D) $(0, 0)$

উত্তর: A) $(-5, 0)$

সমাধান (Solution)

উভয় পক্ষে বর্গ করে পাই:

$$|z-3|^2 = 4|z+3|^2$$

ধরি, $z = x + iy$।

$$(x-3)^2 + y^2 = 4[(x+3)^2 + y^2]$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 = 4(x^2 + 6x + 9 + y^2) = 4x^2 + 24x + 36 + 4y^2$$

সবগুলো পদ ডানপাশে নিয়ে সরল করে পাই:

$$3x^2 + 3y^2 + 30x + 27 = 0$$

3 দ্বারা ভাগ করে পাই:

$$x^2 + y^2 + 10x + 9 = 0$$

$$\Rightarrow (x+5)^2 + y^2 = 16$$

এটি একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্দেশ করে যার কেন্দ্র $(-5, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ 4 একক।

প্রশ্ন (Question) 24

জটিল সংখ্যার ধর্মানুযায়ী, $S = i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 + \cdots + 100i^{100}$ শ্রেণীটির মান কত?

According to the properties of complex numbers, what is the value of the series $S = i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 + \cdots + 100i^{100}$ *?*

A) $50(1 - i)$

B) $50(i - 1)$

C) $50(1 + i)$

D) $-50(1 - i)$

উত্তর: A) $50(1 - i)$

সমাধান (Solution)

প্রদত্ত শ্রেণীটি একটি সমান্তরীয়-গুণোত্তর শ্রেণী (Arithmetico-Geometric Series)।

$$S = i + 2i^2 + 3i^3 + \cdots + 100i^{100} \quad \text{--- (1)}$$

উভয়পক্ষকে i দ্বারা গুণ করে পাই:

$$iS = i^2 + 2i^3 + 3i^4 + \cdots + 100i^{101} \quad \text{--- (2)}$$

সমীকরণ (1) হতে (2) বিয়োগ করে পাই:

$$S(1 - i) = i + (2 - 1)i^2 + (3 - 2)i^3 + \cdots + (100 - 99)i^{100} - 100i^{101}$$

$$\Rightarrow S(1 - i) = (i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{100}) - 100i^{101}$$

আমরা জানি, পরপর ৪টি i এর ঘাতের সমষ্টি 0 এবং 100 পদটি 4 দ্বারা বিভাজ্য হওয়ায় প্রথম বন্ধনীভুক্ত অংশটির মান 0 হবে। এবং $i^{101} = i^{4\times25+1} = i$।

অতএব:

$$S(1 - i) = 0 - 100i = -100i$$

$$\Rightarrow S = \frac{-100i}{1 - i} = \frac{-100i(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{-100i - 100i^2}{2}$$

$i^2 = -1$ বসিয়ে পাই:

$$S = \frac{100 - 100i}{2} = 50(1 - i)$$

প্রশ্ন (Question) 25

যদি $z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta$ হয়, তবে $z^n + \frac{1}{z^n}$ এর মান নিচের কোনটি?

If $z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta$, then what is the value of $z^n + \frac{1}{z^n}$?

A) $2\cos(n\theta)$

B) $2i\sin(n\theta)$

C) $2\sin(n\theta)$

D) $\cos(n\theta)$

উত্তর: A) $2\cos(n\theta)$

সমাধান (Solution)

ধরি, $z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$। তাহলে, $\frac{1}{z} = e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$। স্পষ্টতই, $z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta$ (যা দেওয়া আছে)।

এবার ডি ময়ভারের উপপাদ্য (De Moivre's Theorem) প্রয়োগ করে পাই:

$$z^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$
$$\frac{1}{z^n} = (e^{-i\theta})^n = e^{-in\theta} = \cos(n\theta) - i\sin(n\theta)$$

সুতরাং, যোগফল হবে:

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos(n\theta)$$